

$$1 \times 1 = 1$$

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

$$111111 \times 111111 = 12345654321$$

$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$

$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$

$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

# Les calculs à l'école

comprendre et automatiser

**Thierry DIAS**, HEP Lausanne

thierry.dias@hepl.ch

<https://www.facebook.com/tous.mathematiciens/>



# **Les calculs à l'école**

- 1. Apprentissages : repères didactiques**
- 2. Enseignement : dispositifs rituels**

Une petite mise en bouche pour commencer ?

$$213 - 78$$

213

78

215

80

235

100

+2

+20

$$235 - 100 \longrightarrow 135$$

## Préambule 1

Apprendre en mathématiques est un processus qui comporte des étapes chronologiques en termes :

- de développement cognitif
- de séquences didactiques

# Etapes d'apprentissages : chronologie du développement

## **Manipuler**

Enaction  
Embodied cognition  
Concrete

## **Représenter**

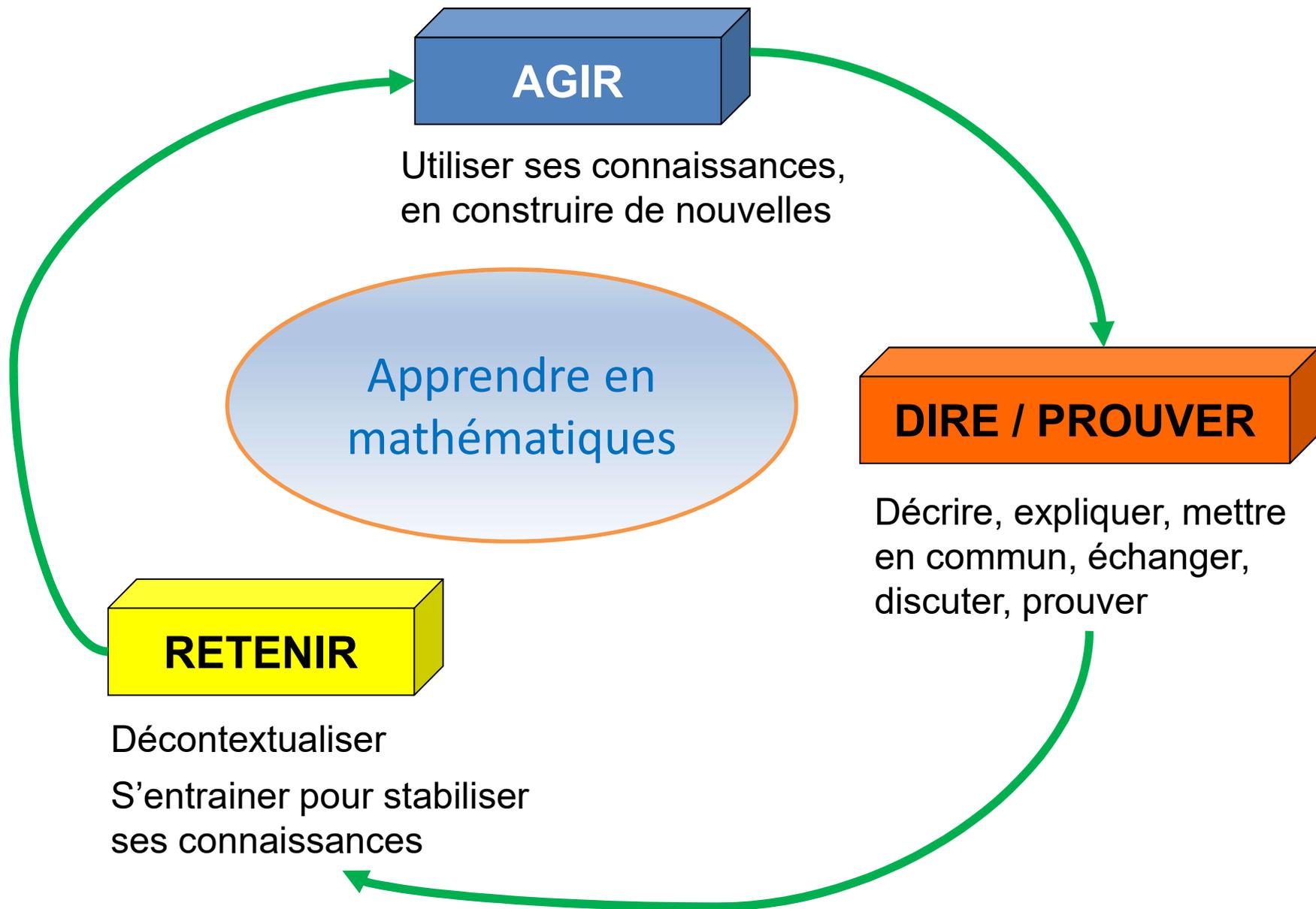
Signes  
Pictural  
Dessin

## **Raisonner**

Comprendre  
Abstraire  
Verbaliser

## **S'entraîner**

Répéter  
Refaire  
Réviser/rebrasser



## Préambule 2

La question actuelle qui se pose à l'enseignement n'est pas :

« faut-il continuer à enseigner à calculer ? »

**mais plutôt :**

« Que faut-il enseigner aujourd'hui en matière de calcul, compte-tenu de l'évolution scientifique, de l'évolution sociale et surtout de l'évolution technologique ? »



INSTITUT DE FRANCE  
**Académie des sciences**

---

## **AVIS SUR LA PLACE DU CALCUL DANS L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE**

*adopté par le Comité secret du 9 janvier 2007.*

4 propositions remarquables



1. Le calcul doit s'enseigner en étroit contact **avec les autres matières** afin de se référer à des situations concrètes et notamment la notion de grandeurs.
2. Son apprentissage suppose effort mais aussi jeu. La mise en place d'automatismes implique **réflexion et compréhension**.
3. L'enseignement du calcul doit commencer par une pratique **simultanée de la numération et des quatre opérations**.
4. La capacité en calcul se développe selon plusieurs modalités, **toutes pertinentes, nécessaires et complémentaires** : calcul mental, calcul posé écrit, calcul approché, calcul instrumenté.

# I – Les calculs à l'école

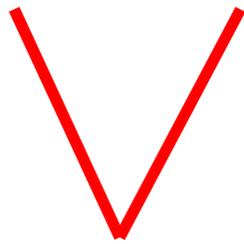
---

## Repères didactiques

Du numérique à l'opérateur  
Plusieurs types de calcul  
Sens et automatismes

Calculer c'est jouer avec les nombres, selon des règles non négociables...

$$9 - 3 : 1/3 + 1 = ?$$



$$3 \times 3$$

$$9 - 3 \times 3 + 1 = 1$$

## les calculs à l'école :

### **POURQUOI :**

rendre les connaissances numériques opératoires

### **COMMENT :** trois types principaux de calcul :

1. mental (réfléchi et/ou rapide)
2. instrumenté (à l'aide d'un outil)
3. écrit : en ligne et posé (algorithmes)

**CONSEIL :** distinguer l'automatisé du raisonné

## **I.1 - POURQUOI :**

rendre les connaissances numériques opératoires

**Construire des liens entre la numération et le calcul**

## manipulation, expérimentation

Les matériels de numération permettent aux élèves de comprendre et de (re)construire les techniques.



## exemples avec l'utilisation des bouliers

- renforcer l'usage et la compréhension de la numération de position
- travailler ou retravailler l'échange/retenue
- mettre en évidence l'importance des compléments à 10
- construire/améliorer l'image mentale des nombres



12

7

5

8

3

17

22

4

NUMERATION

- le plus petit ?
- le plus grand ?
- entre 3 et 8
- plus petit que 7
- plus grand que 12

CALCUL

*trouver un de ces nombres qui soit :*

- la différence entre deux successifs
- le produit de deux d'entre eux
- la somme de trois d'entre eux
- la somme de quatre d'entre eux
- le quotient de la division de eux d'entre eux

0	X	2	3	4	5	6	7	8	9
<del>10</del>	<del>11</del>	<del>12</del>	<del>13</del>	<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	<del>17</del>	<del>18</del>	<del>19</del>
20	<del>21</del>	22	23				27	28	29
30	<del>31</del>	32	33	34	35	36	37	38	39
40	<del>41</del>	42	43	44	45	46	47	48	49
50	<del>51</del>		53	54	55	56	57	58	59
60	<del>61</del>	62	63	64	65				69
70	<del>71</del>	72	73	74	75				79
80	<del>81</del>	82	83	84	85				89
90	<del>91</del>	92	93	94	95	96	97	98	99

Quel nombre se cache sous **52** ?

Quel nombre se cache sous **77** ?

Quelle est la somme des trois nombres cachés sous les **75** ?

Entoure le nombre qui possède 6 dizaines et 9 unités

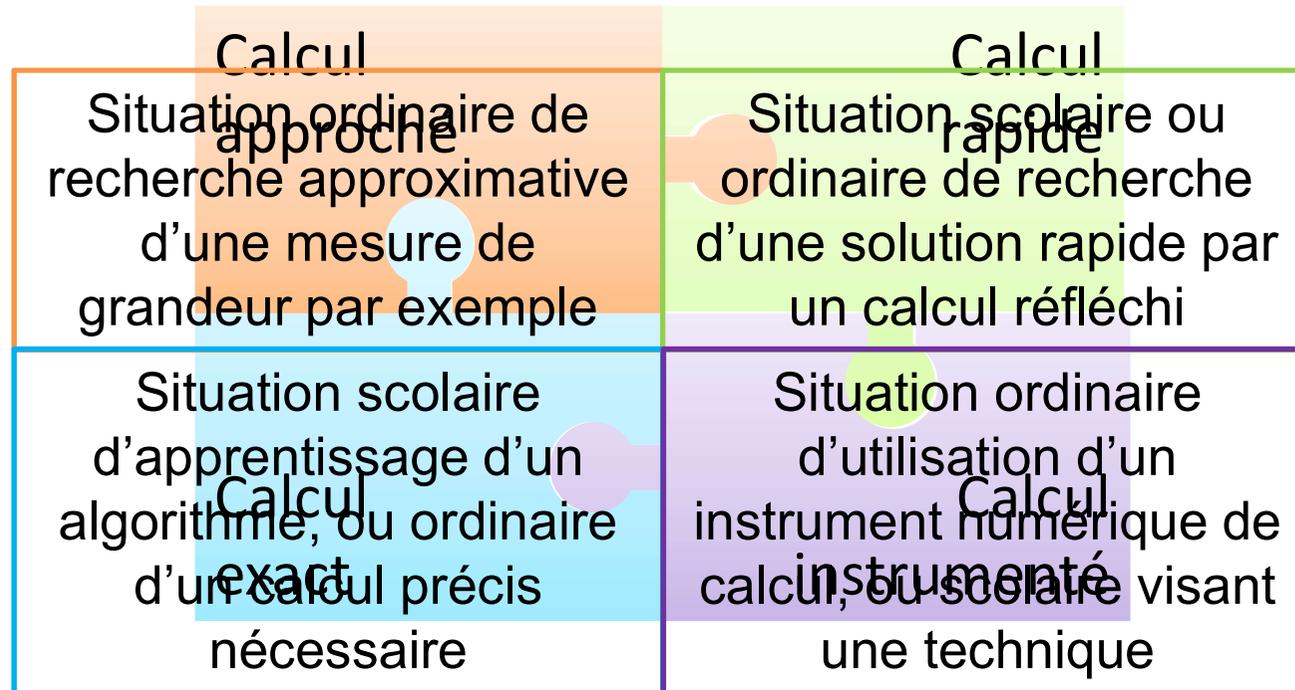
Barre d'une croix tous les nombres qui possèdent le chiffre 1

## **I.2 - COMMENT :**

Trois modalités principales de calcul :

1. mental (réfléchi, rapide, approché)
2. instrumenté (à l'aide d'un outil)
3. écrit : en ligne et posé (algorithmes)

## Et quatre types de situation



### **I.3 - CONSEIL :**

distinguer le calcul automatisé du calcul raisonné

## Une question récurrente : sens ou automatismes ?

Pas d'opposition mais une complémentarité entre :

- le travail nécessaire sur le sens des opérations,

→ **régulièrement et en prenant son temps**

- et le passage obligatoire par le « rodage des moteurs » :  
celui de la construction des automatismes.

→ **souvent et rapidement**

Les différentes formes de calcul (mental, posé, instrumenté) **sont complémentaires** les unes des autres. Quelques conseils par exemples :

- Renforcer la part du **calcul mental** par rapport à celle de l'apprentissage des algorithmes,
- Équilibrer les parts respectives du **calcul exact** et du **calcul approché**.
- Dans les situations d'enseignement, diversifier les modes d'intervention des instruments, l'interaction entre calcul assisté et calcul papier/crayon.

**4 opérations en simultané ?**

**→ Un travail légitime sur le sens**

There are 10 pencils in each box and four others. How many are there altogether?



x	÷
+	-

Amy has 45 Barbies. Kulsuma has 18 less than Amy. How many does Kulsuma have?



x	÷
+	-

Noran has 25. She shares them out between 6 friends. How many are left over?



x	÷
+	-

Warda has 234 marbles. She loses 195. How many does she have left?



x	÷
+	-

There are 2 cakes in 1 box. How many are there in 11 boxes?



x	÷
+	-

Ruqayyah saves 124p. She spends 68p. How much does she have left?



x	÷
+	-

There are some yellow and some orange flowers in a vase. There are 14 flowers altogether. Six are yellow. How many are orange?



x	÷
+	-

Polly Penguin eats 9 fish a day. How many does she eat in 7 days?

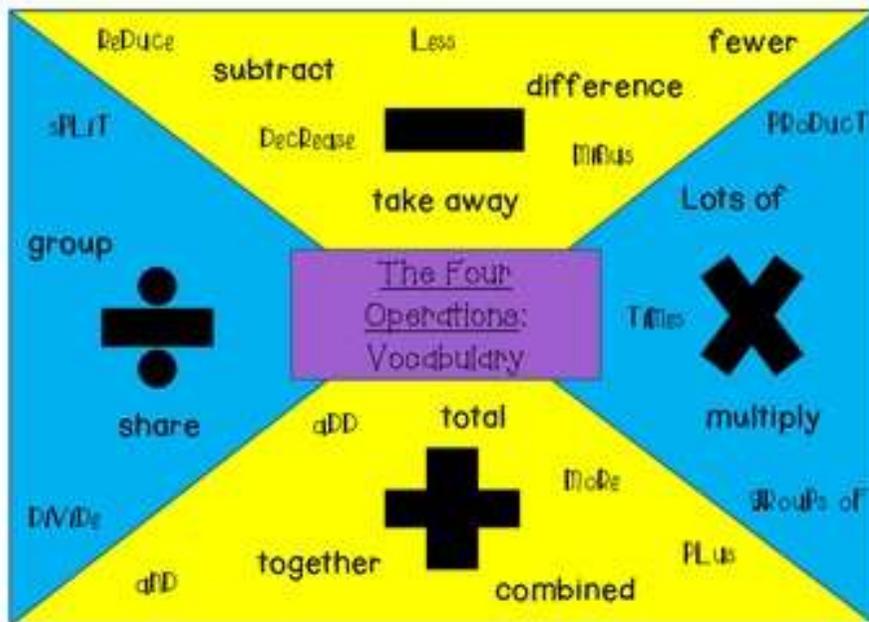


x	÷
+	-

Math Operations	Symbols	Other Words
Addition	+	sum Altogether all in all together total total number add
Subtraction	-	minus greater than more than take away fewer than less than How many more? How many left? How many less? subtract difference is left
Multiplication	× ●	product multiply multiplied by times
Division	÷ /	quotient dividend divide divided by each per average divide equally
Equal	=	the same equals the same as is equal to equivalent

**Lexique, sémantique**

Repérer des indices...  
et des faux amis !



## Sens et concept ?

La conceptualisation, pour un individu donné, d'un objet donné, à un temps donné c'est :

- **un ensemble de situations** dans lesquelles l'objet a été travaillé ;
- **les représentations** qui ont permis ce travail ;
- **les schèmes** qui ont émergé au cours de l'activité associée.

Théorie des champs conceptuels, Vergnaud

# champ conceptuel des opérations, un exemple avec celui de l'addition

Trois grands types de relations additives\* :

*1/ transformation*

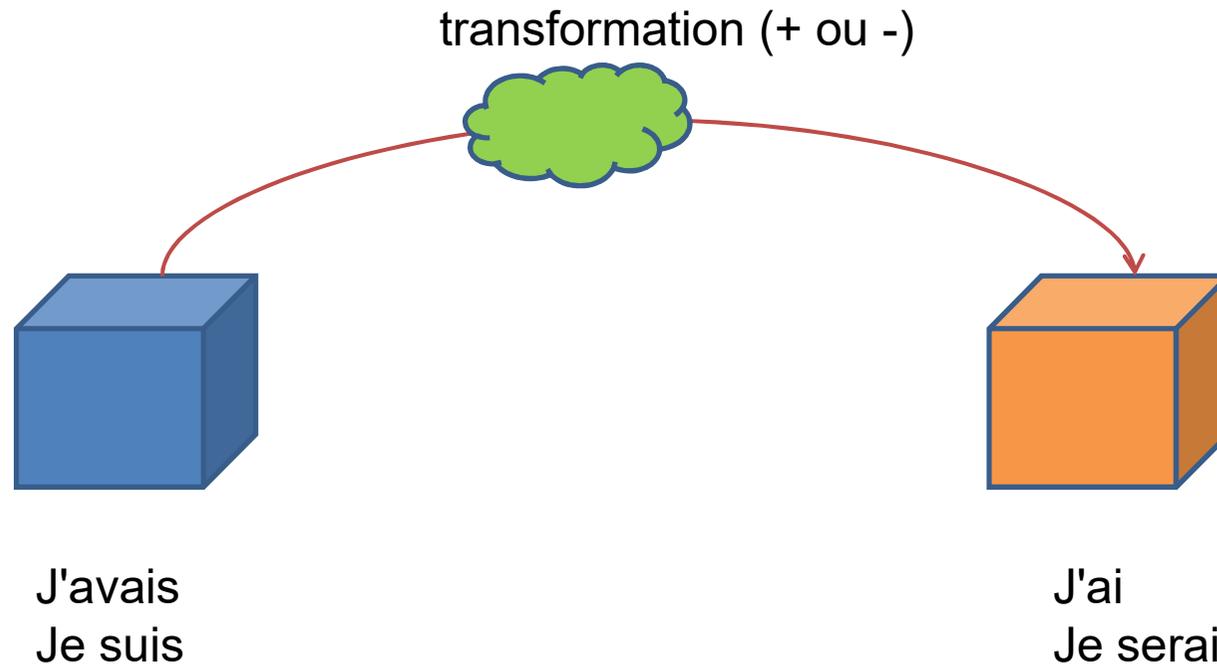
*2/ composition*

*3/ comparaison*

*\* qui peuvent se combiner entre elles*

# 1/ transformation

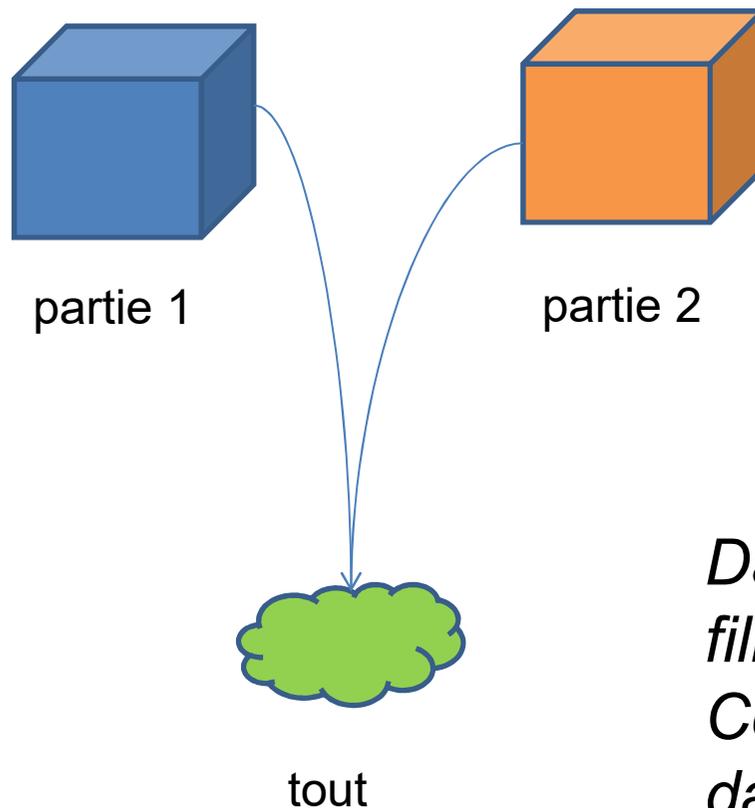
Aspect temporel  
1 unité de grandeur



*Paul joue avance de 14 cases au jeu de l'oie. Il arrive sur la case 37. Sur quelle case était-il avant d'avancer ?*

## 2/ composition

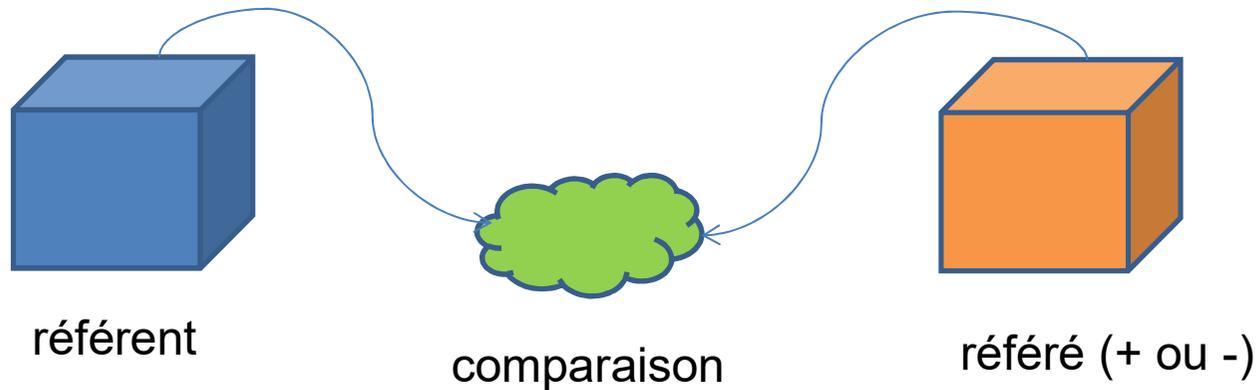
3 unités de grandeur  
Partie / tout



*Dans une école, il y a 68  
filles et 52 garçons.  
Combien y a t-il d'enfants  
dans cette école ?*

### 3/ *comparaison*

Pas de partie / tout  
1 unité de grandeur



*Tom mesure 145 cm. Olga mesure 17 cm de plus.  
Quelle est la taille de Olga ?*

# Apports didactiques

Comprendre\* l'addition c'est admettre que :

- L'opération additive ne se limite pas à la seule situation qui consiste à ajouter deux quantités.
- L'inconnue de ce type de calcul n'est pas forcément le résultat de la relation.
- Les deux opérations que sont l'addition et la soustraction relèvent d'un même champ conceptuel.

\* *au sens Piagétien*

Une recherche de sens incontournable

# **VERBALISER POUR COMPRENDRE**

travail sur la mise en mots des démarches:  
Conversations de calcul

$$25 \times 16$$

inventaire des procédures mises en œuvre pour effectuer  $25 \times 16$

$$\frac{100 \times 16}{4}$$

$$5^2 \times 4^2 = (5 \times 4)^2$$

$$25 \times 4 \times 4 = (25 \times 4) \times 4$$

## II. Les calculs à l'école

---

Exemples de dispositifs rituels :

1. Des énigmes pour raisonner et comprendre
2. Des jeux pour utiliser ses connaissances et s'entraîner

# RITUALISER

- combattre les tensions entre savoir et apprendre.
- s'entraîner pour stabiliser ses connaissances.

## Un rituel : pourquoi ?

- Gagner de l'aisance, de la facilité, de la fluidité grâce à la répétition.
- Acquérir des automatismes (fondamental en mathématiques).
- Réviser, faire fonctionner ses connaissances, s'entraîner.
- Peut se baser sur différents repères : le temps, un lieu, un matériel, une démarche, un jeu. Le principe est la redondance de ces repères avec une fréquence importante sur une période donnée.

## Un rituel : comment ?

Trois caractéristiques majeures :

**REGULARITE**

**REPETITION**

**REGLES**

## Un rituel : comment ?

- **La régularité :**

- annoncés dans un calendrier ou un agenda,
- se déroulent à la même heure, ont toujours la même durée et, si possible, se déroulent dans même lieu.



- **La répétition :**

gestes, paroles, actes et codes rythment ces moments

- **Les règles :**

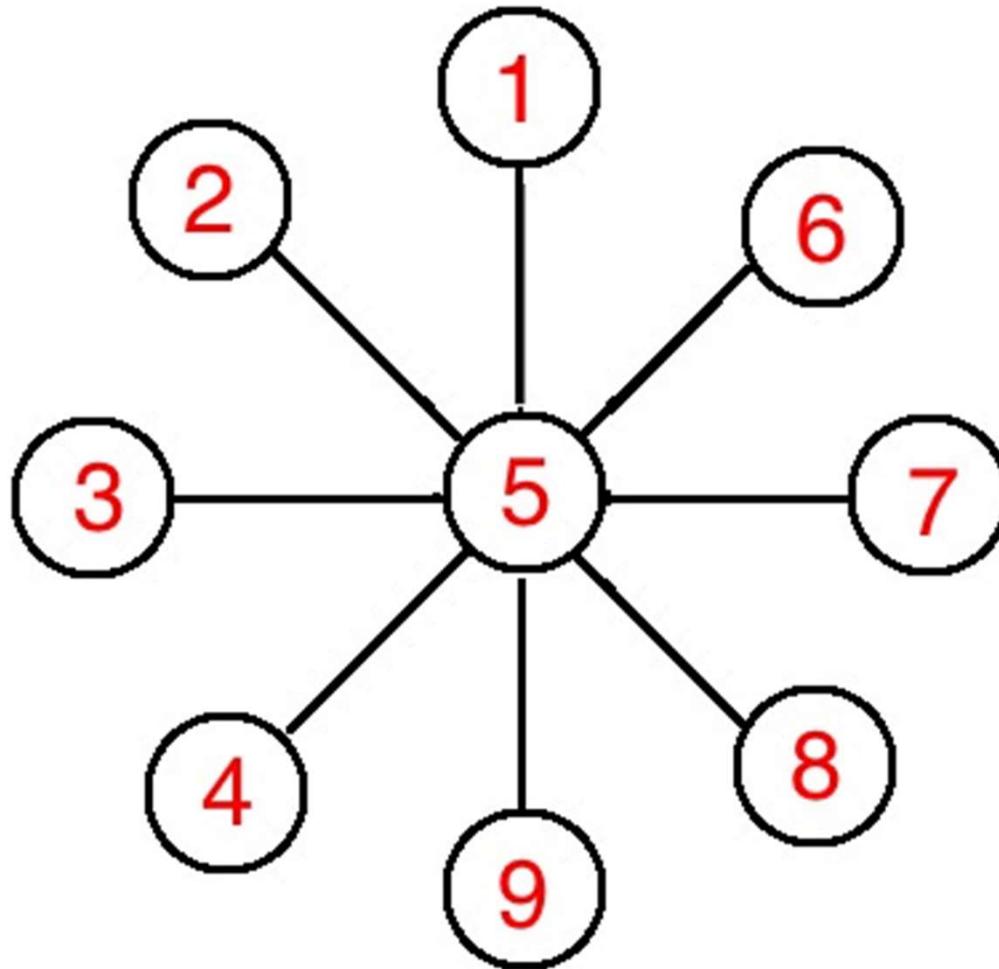
tout n'est pas permis dans un rituel, il y a des règles à respecter pour s'exprimer et pour écouter

## **II.1 - Enigmes de calcul**

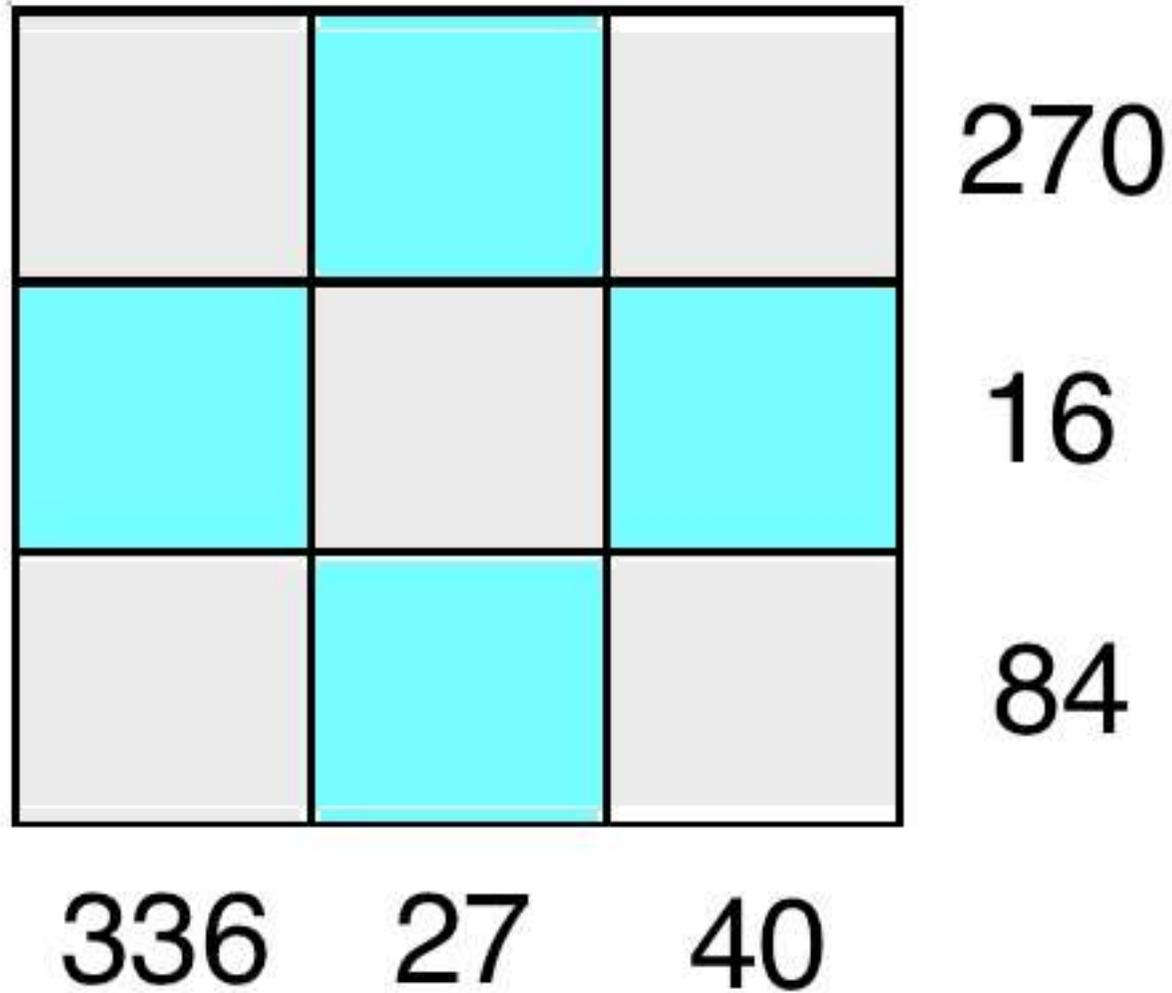
Utiliser, faire fonctionner ses connaissances

Raisonner et comprendre

Placer les nombres de 1 à 9 pour faire la même somme sur chaque branche de l'étoile de Noël.



Placer tous les nombres de 1 à 9 pour que leurs produits soient égaux aux nombres indiqués hors de la grille



Placer tous les nombres de 1 à 9 pour que leurs produits soient égaux aux nombres indiqués hors de la grille

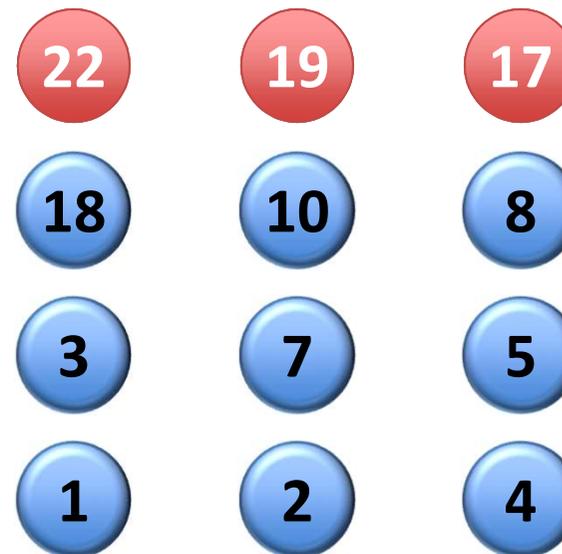
			270
			16
			84
336	27	40	

<b>6</b>	<b>9</b>	<b>5</b>	270
<b>8</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	16
<b>7</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	84
336	27	40	



Faites trois piles avec ces 12 jetons sachant que :

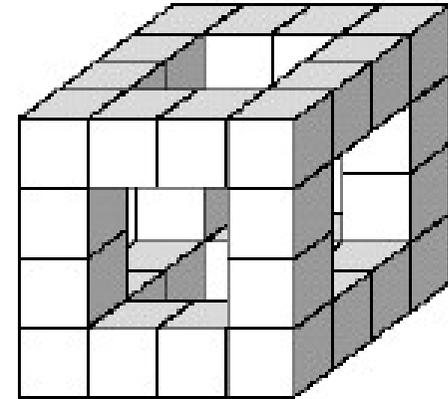
- dans chaque pile il y a le même nombre de jetons,
- dans chaque pile, le jeton du dessus vaut la somme des autres jetons de la pile.



© ARMT

Avec des petits cubes, Sibel a construit cet objet.

Elle décide de l'appeler «le grand cube creux qui mesure 4 petits cubes de côté».



**Combien lui faut-il de petits cubes, au minimum, pour construire un « grand cube creux qui mesure 7 petits cubes de côté » ?**

Mon réveil avance de 10 minutes par heure.  
Je l'ai mis à l'heure hier soir à 22h00.  
Quand je me suis réveillé ce matin, il indiquait  
8h30.

**Quelle heure était-il réellement quand je me  
suis réveillé ?**



## Calcul et résolution de problèmes

Si la pratique des différentes formes de calcul est menée dans le cadre de la résolution de problèmes, les connaissances visées (capacités techniques et de procédures) ne peuvent s'acquérir qu'en y consacrant des temps spécifiques quotidiens.

Ces séances doivent comprendre :

- des moments d'explicitations orales précises,
- et des institutionnalisations écrites notées dans les cahiers des élèves.

## **II.2 – Des jeux pour s'entraîner**

Ritualisation, redondance, répétition  
Acquérir des automatismes

Name: \_\_\_\_\_ Date: \_\_\_\_\_

## Today's Number

### 1,023

Write today's number in ...

word form: \_\_\_\_\_

expanded form: \_\_\_\_\_

standard form: \_\_\_\_\_

**Round to the nearest:**

ten: \_\_\_\_\_

hundred: \_\_\_\_\_

**Draw a base ten model of the number.**

**Double the number.**

less		more
	10	
	100	
	1000	

**Fill in the number line.**

**Is the number even or odd?**

**What is the sum of all the digits?**

**Show today's number using bills and coins.**

Use the back of the paper to write equations that equal today's number.

©www.CFClassroom.com

## Number Detectives

<p>Write me in words:</p> <h3 style="text-align: center;">twelve</h3>	<p>Show ways to make me with subtraction:</p> <p>24-12=12    33-21=12          38-26=12    38-26=12          14-2=12    16-4=12</p>
<p>Show my place value and write me in expanded form:</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-left: 10px;"> <math>10 + 2 = 12</math> </div> </div>	<p>Show ways to make me with multiplication:</p> <p><math>3 \times 4 = 12</math>    <math>12 \times 1 = 12</math>  <math>6 \times 2 = 12</math></p>
<p>Make a growing or shrinking pattern with me.</p> <p>3, 5, 8, <u>12</u>, 17, 23, 30</p>	<p>Show ways to make me with division:</p> <p><math>24 \div 2 = 12</math>  <math>60 \div 5 = 12</math></p>
<p>Make me with money two different ways:</p> <p>0, 2, 4, 6, 8, 10, 12    1, 2, 4, 6, 12</p>	<p>Show a # greater than and a # less than me:</p> <p style="text-align: center;"><u>20</u> &gt; <u>12</u> &gt; <u>7</u></p>
<p>Show ways to make me with addition:</p> <p>10+2=12    4+8=12          6+6=12    7+5=12          9+3=12</p>	<p>Show me on a number line:</p> <div style="text-align: center;"> </div>

Ecris ce nombre avec des lettres :

Dessine ce nombre avec des cubes en faisant des paquets de 10 :

10 de plus : .....  
 10 de moins : .....  
 100 de plus : .....  
 1000 de plus : .....

10 fois plus : .....  
 10 fois moins : .....  
 100 fois plus : .....  
 1000 fois plus : .....

Fais la somme de ses chiffres :

**Nombre du JOUR :**

AVANT LUI :      APRES LUI :

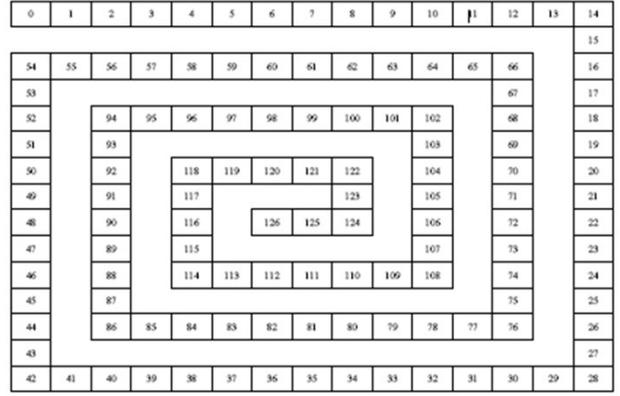
Ecris tous ses diviseurs :

complète :		
centaines	dizaines	unités

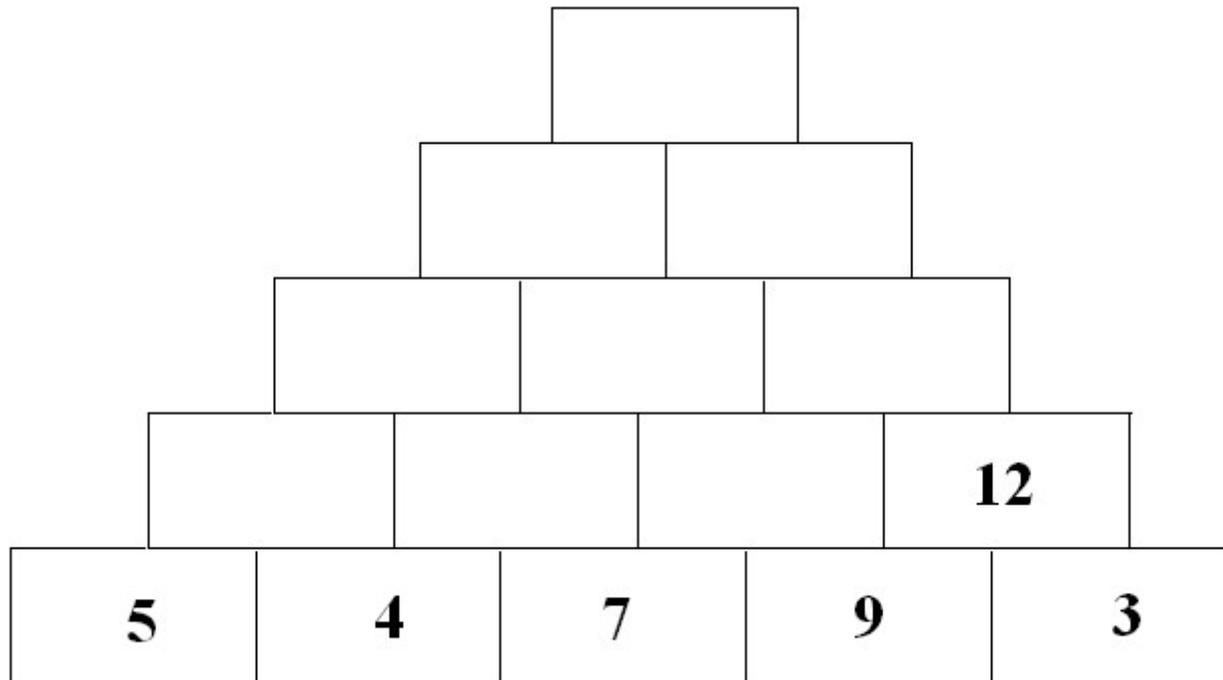
Ecris sa décomposition :  
 .....  
 .....

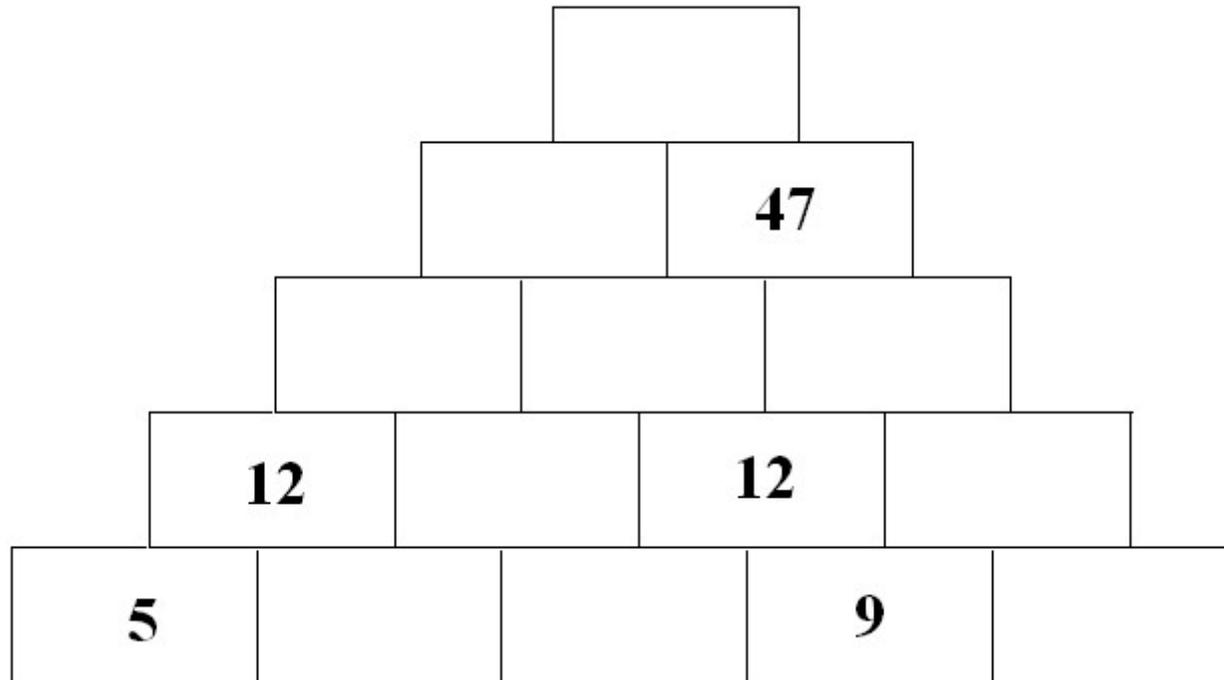
**PAIR ou IMPAIR**

Où est-il ??

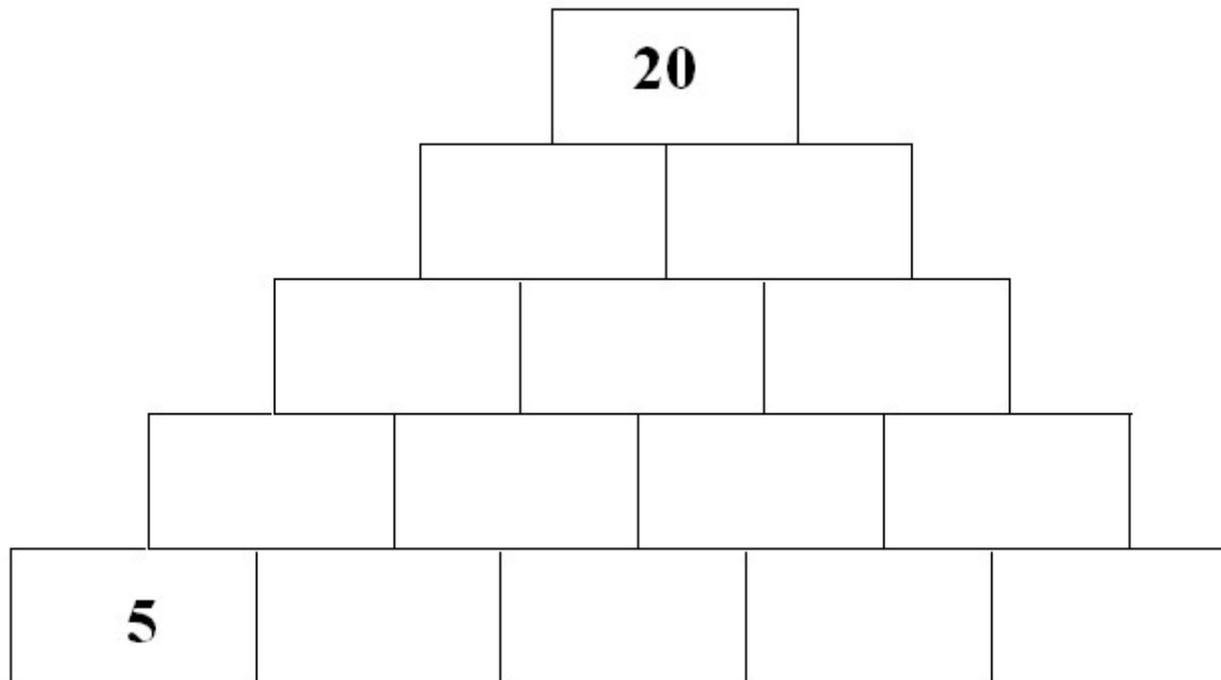


# ritualiser un support de raisonnement





possible ou impossible ???



ritualiser un dispositif de calcul rapide :

Répondre en utilisant les lettres de A à G

<b>A</b> $2 + 1$	<b>B</b> $4 \times 1$	<b>C</b> $4 + 1$	<b>D</b> $4 - 1$	<b>E</b> $10 - 1$	<b>F</b> $11 - 9$	<b>G</b> $3 \times 2$
---------------------	--------------------------	---------------------	---------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

<b>2</b>	<b>9</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
----------	----------	----------	----------	----------

ritualiser un dispositif de calcul rapide :

Répondre en utilisant les lettres de A à G

<b>A</b> $2 + 1$	<b>B</b> $4 \times 2$	<b>C</b> $2 - 1$	<b>D</b> $4 - 1$	<b>E</b> $10 - 4$	<b>F</b> $13 - 5$	<b>G</b> $3 \times 2$
---------------------	--------------------------	---------------------	---------------------	----------------------	----------------------	--------------------------

<b>1</b>	<b>8</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>6</b>
----------	----------	----------	----------	----------

ritualiser un dispositif de calcul rapide :

Répondre en utilisant les lettres de A à G

<b>A</b> $4 \times 6$	<b>B</b> $10 : 2$	<b>C</b> $3 \times 8$	<b>D</b> $18 - 9$	<b>E</b> $12 : 4$	<b>F</b> $3 + 2$	<b>G</b> $1 \times 3$
--------------------------	----------------------	--------------------------	----------------------	----------------------	---------------------	--------------------------

<b>9</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>5</b>	<b>24</b>
----------	----------	----------	----------	-----------

# un rituel FUBUKI

facile

4           7

17

13

15

1           9

8      19      18

2

3

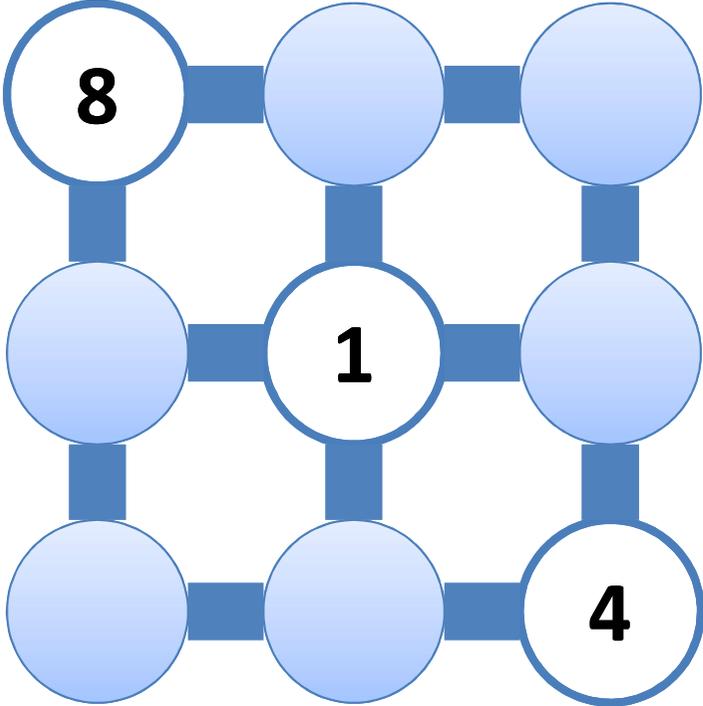
5

6

8

utilise les jetons pour compléter les additions :

moyen



18

12

15

16

9

20

2

3

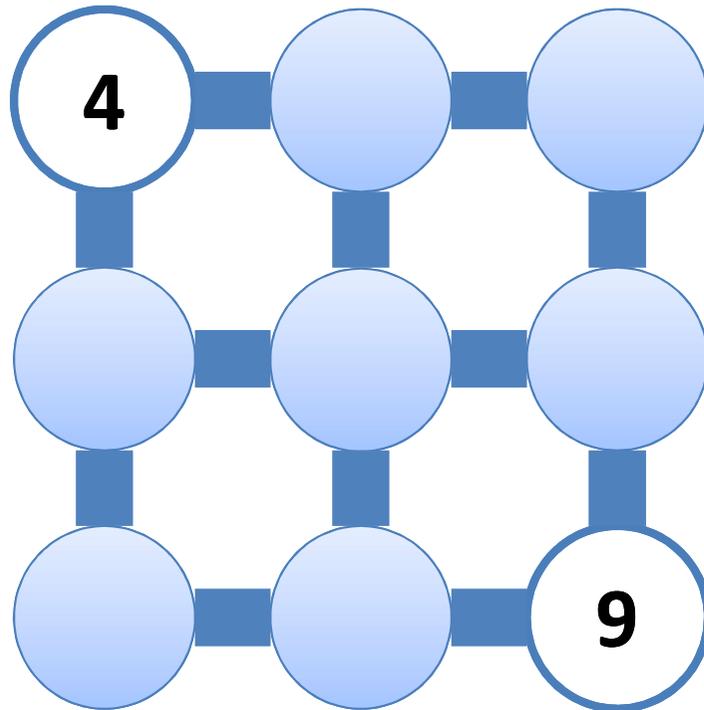
5

6

7

9

difficile



15

6

24

12

17

16

1

2

3

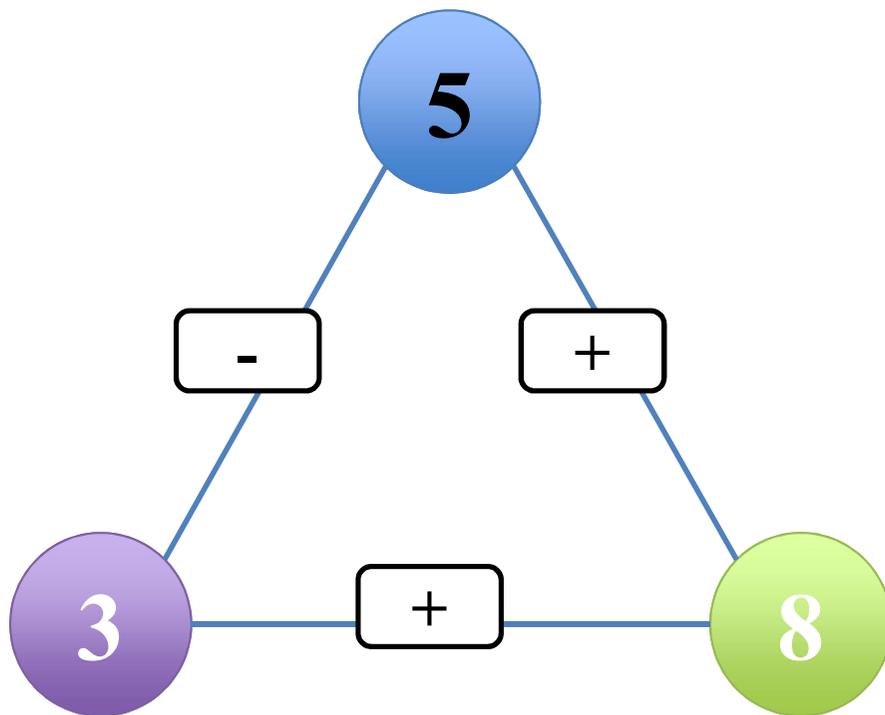
5

6

7

8

# un rituel de calcul mental évolutif



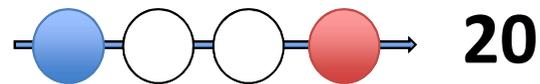
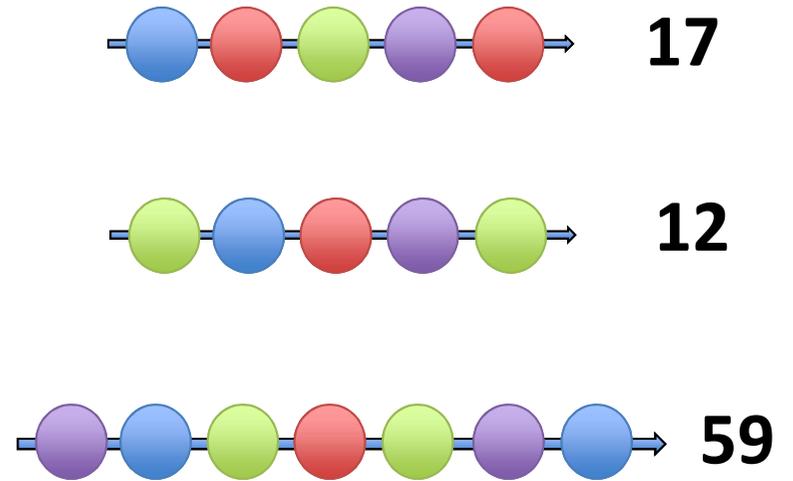
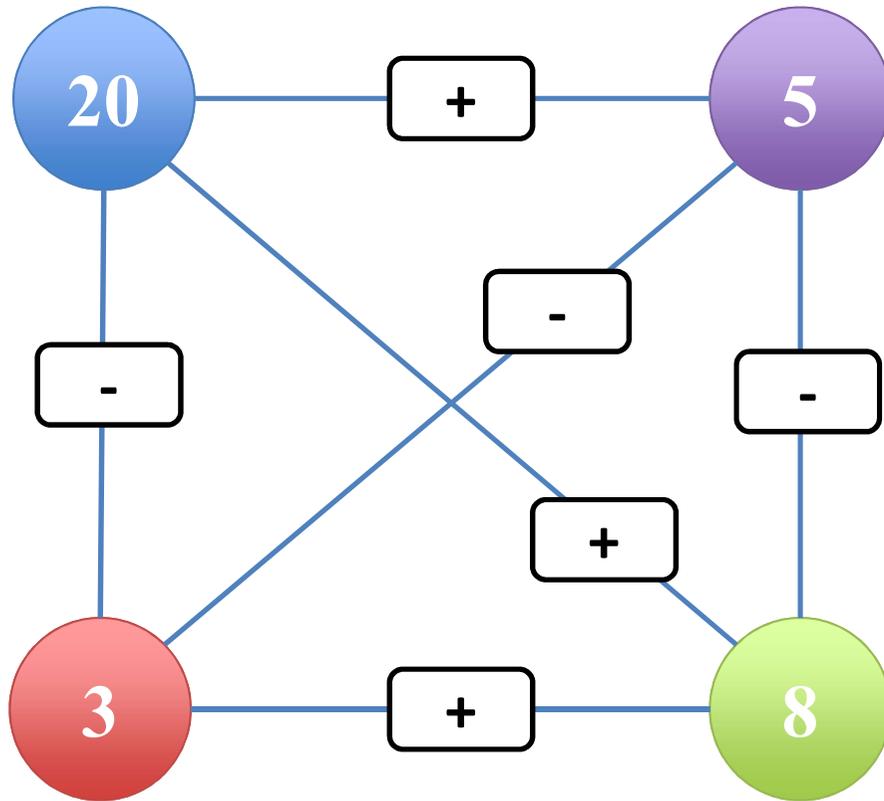
$\rightarrow$      $\rightarrow$  = 10

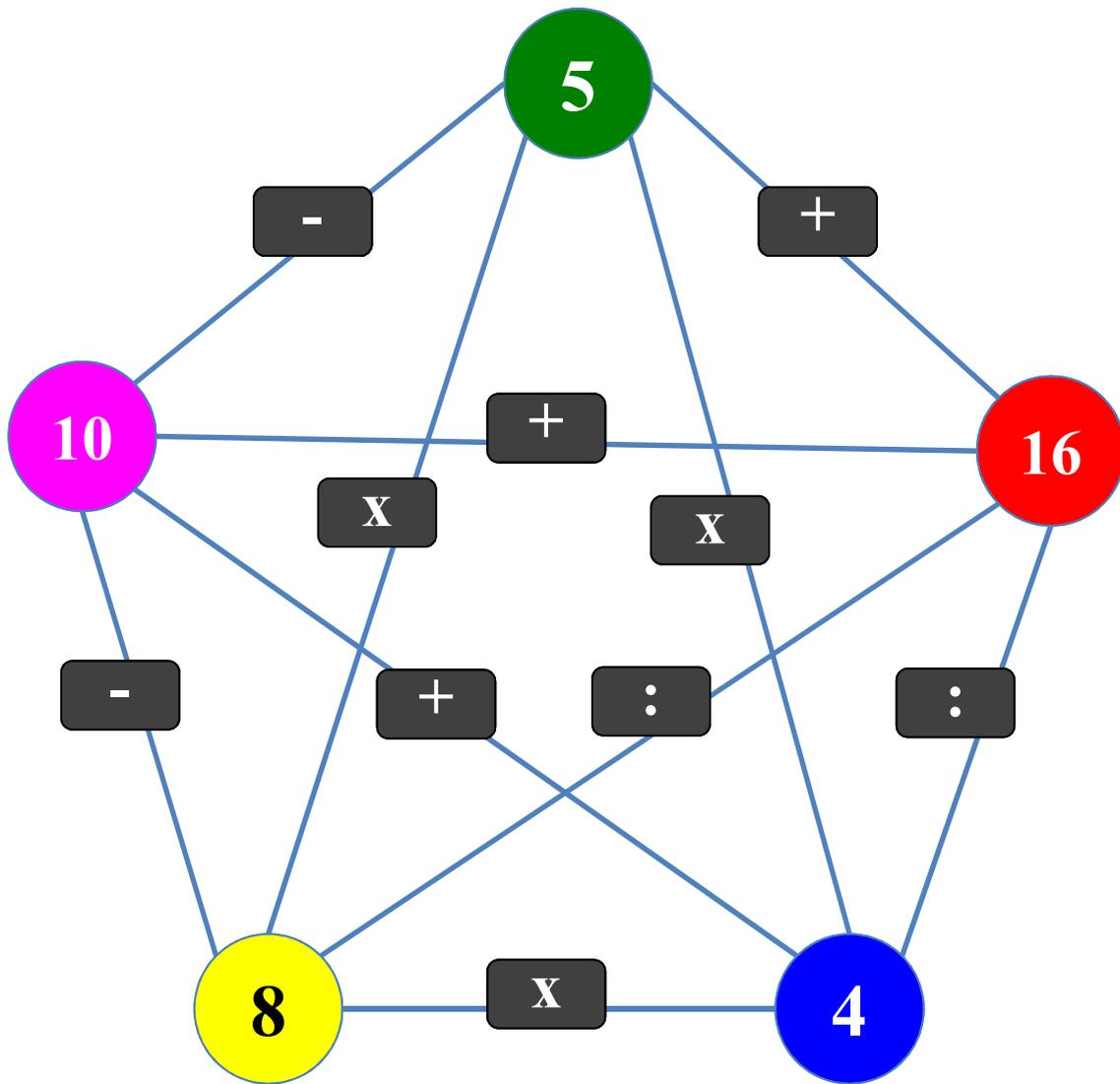
$\rightarrow$       $\rightarrow$  = 11

$\rightarrow$       $\rightarrow$  = 3

$\rightarrow$      $\rightarrow$   $5 + 8 + 3 = 16$

$\rightarrow$      $\rightarrow$   $8 + 5 - 3 = 10$





Red circle, Blue circle, Green circle = ?

Blue circle, Yellow circle, Red circle = ?

Red circle, Yellow circle, Blue circle, Yellow circle, Red circle = ?

Magenta circle, Green circle, Yellow circle, Blue circle, Red circle, Magenta circle = ?

Thierry Dias

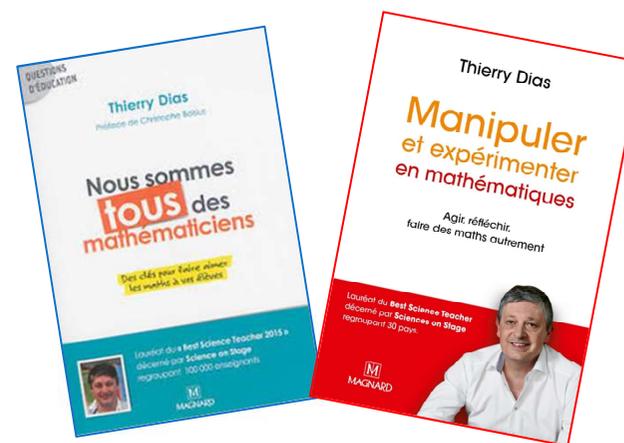
**Enseigner**  
les mathématiques  
à l'école

Une démarche positive  
pour des apprentissages réussis

# Merci de votre attention



**infos complémentaires, appuis  
pédagogiques et didactiques,  
idées de recherches :**



une méthode  
à tester :

